



TITLE:

# 多変数多項式のベキ級数根の桁落ち誤差 その2 (数式処理における理論と応用の研究)

AUTHOR(S):

佐々木, 建昭; 加古, 富士雄

---

CITATION:

佐々木, 建昭 ...[et al]. 多変数多項式のベキ級数根の桁落ち誤差 その2 (数式処理における理論と応用の研究). 数理解析研究所講究録 2001, 1199: 137-148

ISSUE DATE:

2001-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/64920>

RIGHT:

## 多変数多項式のベキ級数根の桁落ち誤差…その 2

筑波大学数学系 佐々木 建昭(Tateaki SASAKI)  
奈良女子大学理学部 加古 富士雄(Fujio KAKO)

### 概 要

多変数多項式の主変数に関するベキ級数根を Newton 法で、浮動小数を用いて計算する際、特異点の近傍で巨大な誤差が生じ得ることを 1994 年に発表した。その当時は原点から遠方での解析が不十分であったので、本稿では特に遠方での解析に重点をおいて報告する。展開点が原点から遠方の場合、展開点の近くに特異点があれば展開次数  $k$  に比例する大きな桁落ちが発生しないが、近くに特異点があれば、場合によって  $k$  に比例する大きな桁落ちが発生し得ることを理論的に証明し、数値例で確認する。また、特異点近傍での安全な (大きな誤差を生じない) 計算法も示す。

本稿では定理の証明等は省略するので、詳細は論文 [SKK00] を参照されたい。

## 1 Newton 法と巨大な誤差

与式  $F(x, u_1, \dots, u_\ell) \in \mathbb{C}[x, u_1, \dots, u_\ell]$  を簡単に  $F(x, u)$  と表す：

$$F(x, u) = f_n(u)x^n + f_{n-1}(u)x^{n-1} + \dots + f_0(u) \quad (1)$$

多項式  $f(u)$  の  $u_1, \dots, u_\ell$  に関する全次数 (total-degree) を  $\text{tdeg}(f)$  と表す。 $f(u)$  の中で全次数最低の項の全次数を位数 (order) といい  $\text{ord}(f)$  と表す。有理式  $f(u)/g(u)$  の位数は  $\text{ord}(f/g) = \text{ord}(f) - \text{ord}(g)$  と定める。多項式  $F(x, u)$  のノルムを  $\|F\|$  と表す。ノルムとしては、たとえば  $F(x, u)$  の絶対値最大の係数とすればよい。 $O(\varepsilon)$  は、計算量のオーダー記号と同じで、 $\varepsilon$  によらない定数倍を除いて  $\varepsilon$  程度の大きさの数を表す。

$f_n \neq 1$  のときは、よく知られたモニック変換  $F(x, u) \mapsto \tilde{F}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} f_n^{n-1} F(x/f_n, u)$  を施せば、 $F(x, u)$  の  $x$  に関する根  $\bar{\chi}(u)$  は  $\tilde{F}(x, u)$  の根  $\tilde{\chi}(u)$  により  $\bar{\chi}(u) = \tilde{\chi}(u)/f_n(u)$  と与えられる。したがって、一般性を失うことなく、 $F(x, u)$  は無平方でモニックである ( $f_n = 1$ ) と仮定する。さらに  $F(x, u)$  は次のように正規化されていると仮定する。

$$\|f_n\| \simeq \max\{\|f_{n-1}\|, \dots, \|f_0\|\} \approx 1 \quad (2)$$

正規化は適当な数値  $a, b$  により  $F(x, u) \mapsto aF(bx, u)$  と変換することにより行える。

(s)  $\stackrel{\text{def}}{=} (s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$  とし、 $F(x, s) \in \mathbb{C}[x]$  の根を  $\alpha$  とする。

$$F(\alpha, s) = 0 \quad (3)$$

**定義 1**  $F(x, s)$  が無平方とならないとき  $(s)$  を  $F(x, u)$  の Newton 法に対する特異点 (singular point) といい、そうでないとき非特異点 (non-singular point) という。すなわち、 $(s)$  が特異点  $\iff \text{resultant}(F(x, s), dF(x, s)/dx) = 0$  である。 ■

$(s)$  が特異点ならば  $F(x, s)$  は重根を持つが、 $\alpha$  が重根とは限らない。 $\alpha$  が重根のとき、 $(\alpha, s)$  は代数幾何の意味で特異点となる ([Wal78] 参照)。

$F(x, u)$  の根  $\bar{\chi}(u)$  は一般に代数関数であるが、 $(\alpha, s)$  が非特異点の場合、 $(u) = (s) + (v)$  と変換して原点を移動すると、新しい変数  $v_1, \dots, v_\ell$  に関する (無限) 級数  $\chi(v)$  に展開できる。 $\chi(v)$  をベキ級数根と呼ぶ。 $\chi(v)$  を全次数  $k$  で打ち切った (打ち切り) ベキ級数を  $\chi^{(k)}(v)$  と表す。 $\chi^{(0)} = \alpha$  を初期値として、 $\chi^{(1)}(v), \chi^{(2)}(v), \dots$  を順に次の Newton 法で計算できる ([KT78], [GCL92] 参照)。

$$\chi^{(k)}(v) \equiv \chi^{(k-1)}(v) - \frac{F(\chi^{(k-1)}(v), s+v)}{F'(\alpha, s)} \pmod{(v)^{k+1}} \quad (4)$$

この式では  $\alpha$  をどう計算するかが決定的に重要である。計算代数では従来、 $\alpha$  を代数的数として計算したが、そうすると  $\chi^{(k)}(v)$  の計算は非常に重くなる。応用面ではベキ級数根を近似的に定めればよい場合も多いので、我々は  $\alpha$  を浮動小数を用いて数値計算で決定するものとする。この場合、 $\alpha$  には必然的に誤差が入り込み、ベキ級数根  $\chi^{(k)}(v)$  にも当然、誤差が入り込むことになる。その誤差が非常に大きくなり得ることを例で示す。

**例 1** 2 変数多項式の場合の巨大な誤差 ([SY99] も参照されたい)。

$$F(x, u) = x^6 - 3(u-1)x^4 - 2ux^3 + 3(u^2 - 2u + 1)x^2 - 6(u^2 - u)x - u^3 + 4u^2 - 3u + 1$$

$s = 0.517$  とし ( $\implies u = 0.517 + v$ )、ベキ級数根を 4 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned} \chi^{(4)}(v) = & (-\underline{0.4012978676277880536} - \underline{0.00008628154461670816683} i) \\ & + (-\underline{0.2587349243255296906} - \underline{1.167585113458430428} i) v \\ & + (\underline{0.1668181426979336807} - \underline{0.08344507519359525892} i) v^2 \\ & + (-\underline{0.1793895553538013117} - \underline{0.6958222465143548943} i) v^3 \\ & + (\underline{2.002104809488503015} - \underline{2.156471842392122295} i) v^4 \end{aligned}$$

ここで、下線部は意味ある数字だが、それ以外は無意味な誤差である。展開次数  $k$  に比例する巨大な誤差が現れていることが分かる。

$$\text{resultant}_x(F, F') = -46656u^4(u-1)^3(64u^3 - 165u^2 + 192u - 64)^2$$

から特異点を計算すると、 $F(x, u)$  は次の 5 つの特異点を持つことが分かる。

$$u = 0, 1, 0.516926 \dots, 1.030599 \dots \pm 0.934011 \dots i$$

したがって、今の場合、展開点は特異点の  $O(10^{-4})$  近傍にある。 ■

## 2 特異点での“級数”展開

本稿の主テーマは特異点近傍での桁落ち解析である。そのためには、特異点での級数展開が必要になる。特異点での展開法は、Sasaki-Kako の特異点での Hensel 構成法を Newton 法に焼き直したものなので、詳細は文献 [SK99], [SKK00] を参照してもらうことにして、ここでは概略のみを記す。なお、本稿では特異点に関する記号には  $\wedge$  をつけて表す。

基本的アイデアは  $F(x, u_1, \dots, u_\ell) \mapsto F(x, tu_1, \dots, tu_\ell)$  なる変換で全次数変数  $t$  を導入し、2変数多項式の根の Puiseux 級数展開と同様、 $t$  に関する分数べき級数に展開することである。簡単のため、原点が特異点と仮定し、 $F(x, 0) = x^m$  なる場合を考える。 $F(x, u)$  の各項  $x^{e_x} t^{e_t} u_1^{e_1} \dots u_\ell^{e_\ell}$ ,  $e_1 + \dots + e_\ell = e_t$ , を 2次元平面上の点  $(e_x, e_t)$  にプロットする (図1参照)。このとき、最高次数項  $x^m$  に対応する点  $(m, 0)$  を通る直線で、少なくとも他の一つのプロット点を通り、しかも全ての項がこの直線の下にはプロットされない、そのような直線が唯一つ定まる。この直線を  $\mathcal{L}_0$  と表し **Newton 線** と呼ぶ (図1参照)。 $\mathcal{L}_0$  上にプロットされる全ての項からなる多項式を  $F_{\text{New}}(x, u)$  と表し **Newton 多項式** と呼ぶ。直線  $\mathcal{L}_0$  の傾きを  $-\lambda$  とすれば、 $F_{\text{New}}(x, tu)$  は  $x$  と  $t^\lambda$  に関して同次多項式となる。

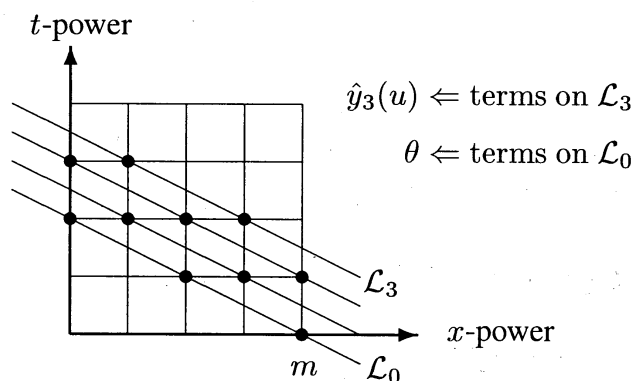


図1：特異点での展開法の図解

$F(x, tu)$  のべき級数根の初期値としては  $F_{\text{New}}(x, u) = 0$  から定まる代数関数  $\theta$  をとる： $F_{\text{New}}(\theta, u) = 0$ 。このとき、 $\theta$  の明示的表現が得られるとは限らないが、最小多項式は得られる。この  $\theta$  を初期値として、図1に示すごとく、 $\mathcal{L}_0 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \Rightarrow \dots$  のように法を上げる形で  $F(x, tu)$  の根を  $t$  に関して級数展開する。法を上げるとき全ての格子点を通過させるには次のようにする。Newton 線の傾き  $-\lambda$  に対し、正整数  $\hat{m}$  と  $\hat{\tau}$  を  $\hat{\tau}/\hat{m} = \lambda$ ,  $\gcd(\hat{\tau}/\hat{m}) = 1$  を満たすように決める。次に、イデアル  $\hat{I}_k$  を  $\hat{I}_k = \langle x, t^\lambda \rangle^m \cdot \langle t^{k/\hat{m}} \rangle$  と定める。すると、 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  を次式を満たすように決めることができる。

$$\hat{F}(\hat{\chi}^{(k)}(tu), tu) \equiv 0 \pmod{\hat{I}_{k+1}}, \quad \text{ord}_t(\hat{\chi}^{(k)}) = \lambda + k/\hat{m}$$

(4) に対応する具体的算式については [SSK00] を参照されたい。

**定理 2**  $\hat{F}(x, u)$  は原点に特異点を持ち、 $\theta$  は  $\hat{F}_{\text{New}}(x, u)$  の単根であるとする。このとき、初期値を  $\hat{\chi}^{(0)}(tu) = t^\lambda \theta$  とする近似 “ベキ級数” 根  $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  ( $k \geq 1$ ) は次の形となる。

$$\begin{cases} \hat{\chi}^{(k)}(tu) = t^\lambda \theta + \hat{y}_1(tu) + \cdots + \hat{y}_k(tu) \\ \text{ord}_t(\hat{y}_j(tu)) = \lambda + j/\hat{m} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \\ \hat{y}_j(u) \text{ は } u_1, \dots, u_\ell \text{ の同次有理式を係数とする } \theta \text{ の多項式} \end{cases} \quad (5)$$

**例 2** 特異点 (原点) での “ベキ級数” 展開。

$$\hat{F}(x, u) = x^2 - 2(u_1 + u_1^2)x + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + 2u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + u_1^4$$

Newton 多項式は  $\hat{F}_{\text{New}}(x, tu) = x^2 - 2u_1x + (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2)$  となり、 $\theta$  の定義多項式は  $\theta^2 - 2u_1\theta + (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) = 0$  となる。根を  $t$  に関して 2 次まで展開した級数根  $\hat{\chi}^{(2)}$  は次式となる。

$$\hat{\chi}^{(2)}(tu) = tu_1 + t^2u_1^2 + (t\theta - tu_1) \cdot \left[ 1 - t \frac{u_2^3 + u_3^3}{2(u_2^2 + u_3^2)} + t^2 \frac{(u_2^3 + u_3^3)^2}{8(u_2^2 + u_3^2)^2} \right]$$

$\theta$  の定義多項式が 2 次ゆえ  $\theta$  は 1 次までしか現れず、 $t$  の各係数部は  $u_2, u_3$  の同次有理式であることに注意されたい。

上記の定理と例から、特異点での “ベキ級数” 展開の各項は多項式になったり、あるいは有理式を係数とする代数関数になったりする。

**定義 3** “ベキ級数” 根  $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  が変数  $u_j$  について多項式のとき、すなわち

$$\hat{\chi}^{(k)}(u) = \chi_i^{(k)}(u) + \hat{\chi}_n^{(k)}(\dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots), \quad \chi_i^{(k)}(u) \in \mathbf{C}[u_1, \dots, u_\ell] \quad (6)$$

と表せるとき、 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  は  $u_j$  に関して *integral* といい、そうでないとき *non-integral* (*rational* あるいは *algebraic*) という。

例 2 においては、 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$  は  $u_1$  に関して *integral* であり、 $u_2, u_3$  に関して *non-integral* である。特異点で分岐する根は *non-integral* であり、直線的に交差する根は *integral* である。 $\ell \geq 2$  の場合、*integral* な根は稀にしか現れないが、 $\ell = 1$  の場合、*integral* な根は頻繁に現れる。

### 3 ベキ級数根の性質

以下、 $F(x, u)$  を展開点  $(u) = (s)$  に移動した多項式を  $G(x, v)$  とする：

$$G(x, v_1, \dots, v_\ell) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, s_1 + v_1, \dots, s_\ell + v_\ell) \quad (7)$$

$G(x, v)$  を  $v_1, \dots, v_\ell$  に関する同次多項式の和に分解する :

$$G(x, v) = G_0(x) + G_1(x, v) + \dots + G_\tau(x, v) \quad (8)$$

ここで  $G_j(x, v)$  は  $v_1, \dots, v_\ell$  の  $j$  次同次多項式

また、 $G_j(x, v)$  の  $x$  に関する  $i$  階微分を  $G_j^{(i)}(x, v)$  と表し、数値  $\beta$  を以下と定める :

$$G_j^{(i)}(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} d^i G_j(x, v)/dx^i, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} dG_0(x)/dx|_{x=\alpha} \quad (9)$$

**補題 4 (基本的補題)**  $\chi^{(k)}(v)$  を次のように全次数一定の項の和に分解する。

$$\chi^{(k)}(v) = \alpha + y_1(v) + \dots + y_k(v), \quad \text{tdeg}(y_j) = j \quad (j = 1, \dots, k) \quad (10)$$

$y_k(v)$  は Newton 法で  $k$  回目に計算される多項式である。 $y_k(v)$  は

$$(\gamma/\beta^e) \cdot \{G_{l_0}^{(0)}(\alpha, v)\}^{e_0} \{G_{l_1}^{(r_1)}(\alpha, v)\}^{e_1} \dots \{G_{l_\kappa}^{(r_\kappa)}(\alpha, v)\}^{e_\kappa} \quad (11)$$

なる項の和となる。ただし、 $\gamma \in \mathbf{C}$  で、かつ次式が成立する。

$$\begin{cases} e = e_0 + e_1 + \dots + e_\kappa & \geq 1 \\ l_0 e_0 + l_1 e_1 + \dots + l_\kappa e_\kappa & = k \\ r_1 e_1 + \dots + r_\kappa e_\kappa & = e - 1 \end{cases} \quad (12)$$

■

次に、展開点を特異点 (今の場合、原点) に近づけた場合のベキ級数根の振舞いを調べる。特異点近傍では、ベキ級数根  $\chi^{(k)}(v)$  は、特異点での“ベキ級数”根  $\hat{\chi}^{(\infty)}(u)$  の変数  $u$  に  $v + s$  を代入して得られる。

**場合 I** 特異点での“ベキ級数”根が integral な場合。

式 (6) の  $\chi_i^{(k)}(u)$  のみを考える。 $\chi_i^{(k)}(u) \in \mathbf{C}[u_1, \dots, u_\ell]$  ゆえ、

$$\lim_{\|s\| \rightarrow 0} \chi^{(k)}(v) \equiv \lim_{\|s\| \rightarrow 0} \chi_i^{(k)}(s + v) \pmod{(v)^{k+1}} \implies \text{convergent} \quad (13)$$

すなわち、展開点を特異点に近づけたとき  $\chi^{(k)}(v)$  は多項式へ収束する。

**場合 II** 特異点での“ベキ級数”根が non-integral な場合。

$A(u)$  は位数  $\kappa$  の同次有理式あるいは代数関数とする :  $\deg_t(A(tu)) = \kappa$ 。 $A(s + v)$  の Taylor 展開の  $k$  次項は、 $\|s\| \rightarrow 0$  のとき  $O(1/\|s\|^{k-\kappa})$  と振舞う。

$$\begin{aligned} \text{有理式例} \quad : \quad & \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_2 + u_3} \implies \frac{(s_2 + v_2)^2 + (s_3 + v_3)^2}{(s_2 + v_2) + (s_3 + v_3)} \\ & = \frac{(s_2^2 + s_3^2) + 2(s_2 v_2 + s_3 v_3) + v_2^2 + v_3^2}{(s_2 + s_3)[1 + v_2/(s_2 + s_3) + v_3/(s_2 + s_3)]} \end{aligned}$$

$$\|s\| \rightarrow 0 \implies v^k \text{ 項 } (k > 1) \text{ は } O(1/\|s\|^{k-1}) \text{ で発散する。}$$

## 4 桁落ち誤差の解析

まず、Newton 法を各ステップ毎に振り返る。各ステップで計算するものは  $\chi^{(k)}(v)$  ではなく、 $y_k(v) = \chi^{(k)}(v) - \chi^{(k-1)}(v)$  であり、その算式は次である。

$$y_k(v) = -[G(\alpha + y_1 + \cdots + y_{k-1}, v)] \text{ の } k \text{ 次項} / \beta \quad (14)$$

$y_k(v)$  の計算は、さらに次の 3 ステップに分解される。

Step 0 :  $\alpha$  を  $G_j^{(i)}(x, v)$  に代入 ( $\Rightarrow$  桁落ち?)。

Step 1、 :  $y_k(v)$  を補題 4 の積項の和に展開する。

Step 2 : 積項を展開して加える ( $\Rightarrow$  桁落ち?)。

以上より、Newton 法における桁落ちは次の方針で解析できる。

- (1)  $|\alpha|, |\beta|$  の値を決める。
- (2)  $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  の値を決める。
- (3)  $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)$  の積項  $\|$  の値を決める。
- (4)  $\|y_k(v)\|$  の値を別の方法で決める。
- (5) 桁落ち量 =  $\max \|G_j^{(i)}(\alpha, v)$  の積項  $\| - \|y_k(v)\|$ 。

この方法では桁落ち量を詳細に計算することは難しいので、展開点を特異点近傍あるいは遠方に限定し、桁落ち量のオーダー解析を行うことにする。

### 4.1 展開点が特異点 (原点) の近傍のとき

一般性を失うことなく  $F(x, u)$  は原点に特異点を持つと仮定し、展開点は原点の  $\delta$  近傍にあるとする :  $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \cdots + s_\ell^2} \ll 1$ 。  $F(x, u)$  を原点で特異な因子  $\hat{F}(x, u)$  と非特異な因子  $\tilde{F}(x, u)$  に分解する (この分解は Hensel 構成で行える) :

$$F(x, u) = \hat{F}(x, u) \tilde{F}(x, u), \quad \hat{F}(x, 0) = x^m, \quad \tilde{F}(0, 0) \neq 0 \quad (15)$$

$\alpha$  は特異点で重根になるとするので、 $\hat{F}(x, s)$  の根とする。 $\hat{F}(x, u)$  に対する Newton 線の傾きを  $-\lambda$  とすれば、 $\alpha, \beta$  および  $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  は次のようにオーダー評価できる。

$$\begin{cases} \alpha = O(\delta^\lambda), & \beta = O(\delta^{(m-1)\lambda}) \\ \|G_j^{(i)}(\alpha, v)\| = O(\delta^{\max\{0, (m-i)\lambda-j\}}) \end{cases} \quad (16)$$

正確に言うと、上式の評価は  $G_j^{(i)}(x, v)$  が主要項である場合にのみ成立し、非主要項に対する評価は小さくなる。これらのオーダー評価を (11) に代入すると次式を得る (ここで、

$\gamma$  は  $k$  には依存するが  $\delta$  には依存しない数で、 $O(1)$  の大きさである。

$$\begin{aligned} & \| \gamma \{G_{j_0}^{(0)}/\beta\}^{e_0} \{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1} \dots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa} \| \\ &= O(\gamma) O(\delta^{(1-0)\lambda-j_0})^{e_0} O(\delta^{(1-i_1)\lambda-j_1})^{e_1} \dots O(\delta^{(1-i_\kappa)\lambda-j_\kappa})^{e_\kappa} \\ &= O(\gamma) O(\delta^{(\sum e_r)\lambda - (\sum i_r e_r)\lambda - (\sum j_r e_r)}) = O(\gamma) O(\delta^{\lambda-k}) \end{aligned}$$

上式と特異点近傍でのベキ級数根  $\chi^{(k)}(v)$  の振舞いを比較して次の定理を得る。

**定理 5**  $F(x, u)$  は原点に特異点を持ち、展開点は原点から  $\delta$  近傍にあるとする： $0 \ll \delta \ll 1$ 。原点での“ベキ級数”根  $\hat{\chi}^{(\infty)}(u)$  の項のうち、どれかの変数について *integral* な項で最低位数のものを  $\hat{T}_\kappa(u)$ , ただし  $\text{ord}_t(\hat{T}_\kappa(tu)) = \kappa$ , とする。また、 $T_k(v)$ , ただし  $\text{ord}_t(T_k(tv)) = k$ , は  $\chi^{(k)}(v)$  の主要項であるとする。このとき、 $k < \kappa$  ならば  $T_k(v)$  に  $O(\delta^{\lambda-k})$  の桁落ちが生じ、 $k \geq \kappa$  ならば  $T_k(v)$  に  $O(\delta^{\lambda-\kappa})$  の桁落ちが生じる。 ■

この定理の由来は次の通りである。まず、上記のオーダー評価によると、展開点を特異点に近づけると  $\chi^{(k)}(v)$  は  $O(\delta^{\lambda-k})$  の発散をする。特異点で non-integral な場合、 $\|s\| \rightarrow 0$  で  $\hat{\chi}^{(\infty)}(s+v)$  も同じオーダーの発散をするから、桁落ちは生じない。しかし、特異点で integral な場合、 $\|s\| \rightarrow 0$  で  $\hat{\chi}^{(\infty)}(s+v)$  は収束するから、差し引いた分だけ桁落ちが生じることになる。

## 4.2 原点から遠方での展開（近くに特異点なし）

展開点は原点から十分遠方にあるとする： $D \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \dots + s_\ell^2} \gg 1$ 。今の場合、重要な役割を演じるのは各  $f_i(u)$  の中で全次数が最大の項である。たとえば、(1) の  $f_i(s)$  は次のように近似できる。

$$|f_i(s)| = O(D^{\tau_i}), \quad \tau_i = \text{tdeg}(f_i(u)) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

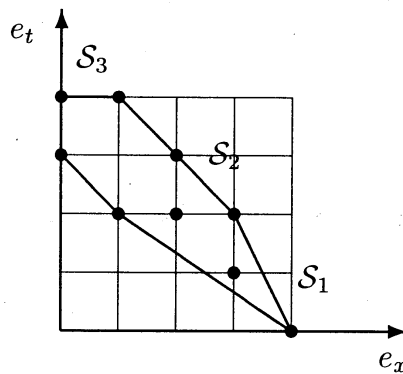


図 2 : 凸包  $\Omega$  とその上辺  $S_1, S_2, \dots$



$F(x, u)$  の各項を図 1 のようにプロットし、全てのプロット点を囲む最小の凸包を  $\Omega$  とする (図 2 参照)。 $\Omega$  の上辺を右から順に  $S_1, \dots, S_\sigma$  とし、各  $S_i$  上にプロットされる全ての項からなる多項式を  $F_{S_i}(x, u)$  とする。すると、 $\alpha$  は近似的に  $F_{S_i}(x, s)$  ( $1 \leq i \leq \sigma$ ) のどれかの根として定まることになる。

$\alpha$  が近似的に  $F_{S_i}(x, s)$  の根として定まるとすれば、次のオーダー評価を得る。

$$\alpha = O(D^{\bar{\lambda}}), \quad \bar{\lambda} > 0 \quad (17)$$

ここで、辺  $S_i$  の傾きを  $-\bar{\lambda}$  とした。次に、 $\beta$  の評価であるが、展開点の近傍に特異点はないと仮定する。 $(F_{S_i}(x, s))$  が近接根を持てば、 $F(x, u)$  は  $(s)$  の近傍  $(\hat{s})$  に特異点を持つ可能性が高い。したがって、この仮定は「 $F_{S_i}(x, s)$  は近接根を持たない」と言い換えてもよい。) このとき、 $\beta$  は次のようにオーダー評価できる。

$$\beta = O(D^{(\bar{n}-1)\bar{\lambda}+\bar{\tau}}), \quad \bar{n} = \deg_x(F_{S_i}(x, u)), \quad \bar{\tau} = \text{tdeg}(f_{\bar{n}}) \quad (18)$$

さらに、 $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  は次のようにオーダー評価できる。

$$\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\| = O(D^{\max\{0, (\bar{n}-i)\bar{\lambda}-j\}+\bar{\tau}}) \quad (19)$$

これらより、(11) は次のようにオーダー評価される。

$$\begin{aligned} & \| \hat{\gamma} \{G_{j_0}^{(0)}/\beta\}^{e_0} \{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1} \dots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa} \| \\ &= O(\hat{\gamma}) O(D^{(1-0)\bar{\lambda}-j_0})^{e_0} O(D^{(1-i_1)\bar{\lambda}-j_1})^{e_1} \dots O(D^{(1-i_\kappa)\bar{\lambda}-j_\kappa})^{e_\kappa} \\ &= O(\hat{\gamma}) O(D^{(\sum e_r)\bar{\lambda}-(\sum i_r e_r)\bar{\lambda}-(\sum j_r e_r)}) = O(\hat{\gamma}) O(D^{\bar{\lambda}-k}) \end{aligned}$$

この式の右辺は  $O(D^{-k})$  に比例し、ベキ級数根の収束半径が  $O(D)$  であることを示している。したがって、次の定理を得る。

**定理 6** 展開点は原点から遠方  $D \gg 1$  の点にあり、 $F(x, s)$  の根  $\alpha$  は他の根から  $O(|\alpha|)$  程度離れていると仮定する。このとき、任意の  $k$  に対し  $y_k(v)$  の計算で  $O(D^{ck})$ ,  $c > 0$ , の大きな桁落ちが生じることはない。 ■

### 4.3 原点から遠方での展開 (近くに特異点あり)

前節と同じく、展開点は原点から遠方とする： $D \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \dots + s_\ell^2} \gg 1$ 。前節と異なるのは、展開点の近傍に特異点があることである。すなわち、特異点の位置を  $(u) = (\hat{s})$  とするとき、次式を仮定する。

$$D' \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|s_1 - \hat{s}_1|^2 + \dots + |s_\ell - \hat{s}_\ell|^2} \ll D \quad (20)$$

議論を明確にするため、 $(\hat{\alpha}, \hat{s})$  は多重度  $m$  の (代数幾何の意味での) 特異点とする :

$$\frac{\partial^{i_0}}{\partial x^{i_0}} \frac{\partial^{i_1}}{\partial u_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_\ell}}{\partial u_\ell^{i_\ell}} F(x, u) \Big|_{x=\hat{\alpha}, (u)=(\hat{s})} = 0 \quad \text{for } i_0 + i_1 + \cdots + i_\ell \leq m-1 \quad (21)$$

$\alpha$  は前節と同様、 $F_{S_i}(x, s)$  の根として定まるが、仮定より  $F_{S_i}(x, s)$  は  $\alpha$  の近傍に  $|\alpha - \alpha'| \ll |\alpha|$  なる根  $\alpha'$  を持つので、 $\beta$  と  $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  の評価は慎重に行う必要がある。

$$G_j^{(i)}(\alpha, v) = \frac{1}{j!} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + v_\ell \frac{\partial}{\partial u_\ell} \right]^j \frac{\partial^i}{\partial x^i} F(x - \hat{\alpha} + \alpha, u - \hat{s} + s) \Big|_{x=\hat{\alpha}, (u)=(\hat{s})}$$

と表し、 $F(x - \hat{\alpha} + \alpha, u - \hat{s} + s)$  を次のように Taylor 展開する。

$$F(x - \hat{\alpha} + \alpha, u - \hat{s} + s) = F(x, u) + \sum_{j'=1}^{\max\{n, \tau\}} \frac{1}{j'!} \left[ (\alpha - \hat{\alpha}) \frac{\partial}{\partial x} + (s_1 - \hat{s}_1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + (s_\ell - \hat{s}_\ell) \frac{\partial}{\partial u_\ell} \right]^{j'} F(x, u)$$

これら 2 式より、 $G_j^{(i)}(\alpha, v)$  を  $\frac{\partial^{i_0}}{\partial x^{i_0}} \frac{\partial^{i_1}}{\partial u_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_\ell}}{\partial u_\ell^{i_\ell}} F(x, u) \Big|_{x=\hat{\alpha}, (u)=(\hat{s})}$  で表すことができる。

この計算法により、 $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$  に対して次のオーダー評価を得る。

$$\frac{\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|}{\hat{B}_{i,j}} = \begin{cases} O(1), & i+j \geq m \\ O(\max\{|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|, \|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\|\}^{m-(i+j)}), & i+j < m \end{cases} \quad (22)$$

$$\hat{B}_{i,j} = \max \left\{ \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!} |\hat{\alpha}^{n-i-1} g_{j,n-1}(\hat{s})|, \frac{(n-2)!}{(n-i-2)!} |\hat{\alpha}^{n-i-2} g_{j,n-2}(\hat{s})|, \cdots \right\}$$

ここで、 $G_j(x, u) = g_{j,n-1}(u)x^{n-1} + g_{j,n-2}(u)x^{n-2} + \cdots$  とおいた。 $F(x, u)$  の規格化 (2) より  $\|g_{j,n'}(u)\| = O(1)$  ( $n' = n-1, n-2, \dots$ ) である。

(22) によると、桁落ちは  $|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|$  の大きさに依存する。 $\|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\| = D'/D$  ゆえ、次の三つの場合に分けて考察する。

$$\frac{|\alpha - \hat{\alpha}|}{|\hat{\alpha}|} \stackrel{\text{def}}{=} O([D'/D]^{\eta_\alpha}) = \begin{cases} \text{Case 1: } O([D'/D]^{\eta_1}), & 1/m \leq \eta_1 < 1 \\ \text{Case 2: } O([D'/D]^{\eta_2}), & \eta_2 = 1 \\ \text{Case 3: } O([D'/D]^{\eta_3}), & \eta_3 > 1 \end{cases} \quad (23)$$

まず、 $\beta$  は次のようにオーダー評価できる。

$$\beta = O(D^{(\bar{n}-1)\bar{\lambda}+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{(m-1)\eta_\alpha}) \quad (24)$$

一方、(22) 右辺の  $O(\max\{|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|, \|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\|\})$  を考慮すると

$$\begin{cases} \|G_0^{(i>1)}(\alpha)\| &= O(D^{(\bar{n}-i)\bar{\lambda}-0+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{\max\{0, (m-i)\eta_\alpha\}}) \\ \|G_{j>0}^{(i)}(\alpha, v)\| &= O(D^{(\bar{n}-i)\bar{\lambda}-j+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{\max\{0, (m-i-j)\eta\}}) \end{cases} \quad (25)$$

を得る。ただし、 $\eta$  は次式で定義される。

$$\max \left\{ \frac{|\alpha - \hat{\alpha}|}{|\hat{\alpha}|}, \frac{\|s - \hat{s}\|}{\|\hat{s}\|} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} O([D'/D]^\eta) = \begin{cases} \text{Case 1: } O([D'/D]^{\eta_1}) \\ \text{Case 2: } O([D'/D]) \\ \text{Case 3: } O([D'/D]) \end{cases} \quad (26)$$

これらより (11) の評価として次式を得る。

$$\begin{aligned} & \| \{G_0^{(i'_1)}/\beta\}^{e'_1} \cdots \{G_0^{(i'_\mu)}/\beta\}^{e'_\mu} \cdot \{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1} \cdots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa} \| \\ &= O(D^{\bar{\lambda}-k}) \cdot O([D'/D]^{\eta(1-k)+(m-1)(\eta-\eta_\alpha)e}) \cdot O([D'/D]^{(\eta_\alpha-\eta)\sum_{r=1}^\mu(m-i'_r)e'_r}) \end{aligned}$$

これより、 $y_k(v)$  の主要項  $T_k(v)$  に対して次式のオーダー評価を得る。

$$\frac{\|T_k(v)\|}{D^{\bar{\lambda}-k}} = \begin{cases} \text{Case 1: } O([D'/D]^{\eta_1(1-k)}) \\ \text{Case 2: } O([D'/D]^{(1-k)}) \\ \text{Case 3: } O([D'/D]^{(1-k)-(\eta_3-1)(mk-m+1)}) \end{cases} \quad (27)$$

特異点と展開点との距離が  $D'$  であることを考えれば、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k(v)\| \propto [D']^{-k}$  となるはずで、Case 2 はそれに当たる。Case 3 では主要項はそれより大きく、差の分が桁落ちとなって現れるはずである。しかし、Case 1 では主要項の大きさが必要とされるものより小さいので、Case 1 が現実にかかるかどうか疑わしい。以上より、Case 2 と 3 に対して次の定理を得る。

**定理 7** 展開点は原点から遠方にあるとする： $D \stackrel{\text{def}}{=} \|s\| \gg 1$ 。さらに、展開点に近い点 ( $\hat{s}$ ) に特異点があるとする： $\|s - \hat{s}\| \stackrel{\text{def}}{=} D' \ll D$ 。 $F(x, s)$  の根を  $\alpha$ 、 $F(x, \hat{s})$  の根を  $\hat{\alpha}$  とし、 $|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}| = O([D'/D]^\eta)$  とする。 $\eta = 1$  の場合、 $y_k(v)$  の計算で  $O([D/D']^{ck})$ ,  $c > 0$  の大きな桁落ちが生じず、 $\eta > 1$  の場合には  $O([D/D']^{(\eta-1)mk})$  の桁落ちが生じる。 ■

**例 3** 遠方での展開（近くに特異点あり）、 $\eta = 1$  の場合。

$$\begin{aligned} F(x, u) = & x^6 - 3(u-1)x^4 - 2ux^3 + 3(u^2 - 2u + 1)x^2 \\ & - 6(u^2 - u)x - (3/4)u^3 + 4u^2 - 3u + 1 \end{aligned}$$

これは例 1 とは  $u^3$  項の係数が異なるのみだが、特異点  $\hat{s}_1 = 1270.84 \cdots$ ,  $\hat{s}_2 = 753.57 \cdots$  を持つ。展開点を  $s = 1260$  に選ぶ： $D = 1260$ ,  $D' \approx 10.84$ 。 $F(x, \hat{s})$  は重根  $\hat{\alpha} = 39.644 \cdots$  を持ち、この重根は  $F(x, s)$  では二つの近接根に分離する： $\alpha_1 = 38.405 \cdots$ ,  $\alpha_2 = 40.096 \cdots$ 。したがって、 $|\alpha_i - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}| = O(D'/D)$  である。 $\alpha = \alpha_2$  と選ぶ。

ベキ級数根を 8 次まで計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \chi^{(8)}(v) = & 40.09 \cdots - 0.01232 \cdots v - 0.0006800 \cdots v^2 \\ & - 3.119 \cdots \times 10^{-5} v^3 - 1.798 \cdots \times 10^{-6} v^4 - 1.160 \cdots \times 10^{-7} v^5 \\ & - 8.029 \cdots \times 10^{-9} v^6 - 5.818 \cdots \times 10^{-10} v^7 - 4.359 \cdots \times 10^{-11} v^8 \end{aligned}$$

先頭 2 項を除き、 $v^k$  項の係数  $c_k$  が  $k$  の増加とともに  $O(1/D')$  で減少することが分かる。 $c_1$  は  $O(D/D')$  の誤差を含むが、これは  $G_1(x, v) \sim \alpha$  を代入する際に生じた桁落ちである。しかし、理論どおり  $c_2 \sim c_8$  ではそれ以上の桁落ちは生じていない。 ■

## 5 特異点近傍での安全な計算法

Newton 法を正直に適用してベキ級数根  $\chi^{(k)}(v)$  を計算すると、特異点近傍で展開次数  $k$  に比例する大きな桁落ちが生じ得ることを見た。本章では、特異点での展開を経由することにより、大した桁落ちを生じることなく  $\chi^{(k)}(v)$  を計算できることを示す。

大きな桁落ちは根が integral な部分に起きる。そこで、特異点で“ベキ級数”根  $\hat{\chi}^{(k')}(u)$  の integral な部分  $\chi_0^{(k')}(u)$  を計算し、 $\chi_0^{(k')}(s+v)$  から  $\chi^{(k)}(v)$  の大きな桁落ちを起こす部分を計算するのである。 $\chi_0^{(k')}(u) \in \mathbf{C}[u]$  ゆえ  $\chi_0^{(k')}(s+v)$  は簡単に展開でき、 $\|s\| \ll 1$  ゆえ、 $k'$  の値を  $k$  より幾分大きく選んでおけば、 $\chi^{(k)}(v)$  は十分な精度で計算できる。

例 4 例 1 におけるベキ級数根の桁落ちなしの計算。

$F(x, u)$  は  $\hat{s} = 0.5169261021 \dots$  に特異点を持ち、 $F(x, \hat{s})$  は重根  $\hat{\alpha} = -0.4012787467 \dots$  を持つ。そこで、まず  $F(x, u)$  を  $(x, u) = (\hat{\alpha}, \hat{s})$  の位置に原点移動する：

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{x}, \hat{u}) &\stackrel{\text{def}}{=} F(\hat{x} - 0.40127874676866, \hat{u} + 0.51692610217531) \\ &= \hat{x}^6 - 2.407 \dots \hat{x}^5 + (3.864 \dots - 3\hat{u})\hat{x}^4 \\ &\quad + (4.652 \dots + 2.815 \dots \hat{u})\hat{x}^3 + (3.733 \dots - 3.389 \dots \hat{u} + 3\hat{u}^2)\hat{x}^2 \\ &\quad + (1.932 \dots \hat{u} - 8.407 \dots \hat{u}^2)\hat{x} + (5.339 \dots \hat{u}^2 - \hat{u}^3) \end{aligned}$$

ここで、 $O(10^{-13})$  以下の項は棄却した（以下の計算でも同様）。この棄却により誤差のみの項は全て除外される。 $\hat{F}(\hat{x}, \hat{u})$  は次数 2 の特異因子と次数 4 の非特異因子を持つ。非特異因子の Newton 多項式は  $\hat{F}_{\text{New}}(\hat{x}, \hat{u}) = 3.733 \dots \hat{x}^2 + 1.932 \dots \hat{u}\hat{x} + 5.339 \dots \hat{u}^2$  で、 $\hat{F}_{\text{New}}(\hat{x}, \hat{u})$  の根が  $\hat{F}(\hat{x}, \hat{u})$  の根の第 1 次近似  $\hat{\chi}^{(1)}(\hat{u})$  を与える（共役根のうち一方を選ぶ）：

$$\hat{\chi}^{(1)}(\hat{u}) = (-0.25875958225623 + 1.1675727920436 i) \hat{u}$$

この初期値から特異点での級数根をたとえば 5 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^{(5)}(\hat{u}) &= (-0.25875958225623 + 1.1675727920436 i) \hat{u} \\ &\quad + (0.1668578810829 + 0.083290774208661 i) \hat{u}^2 \\ &\quad + (-0.17932703036999 + 0.6959452980097 i) \hat{u}^3 \\ &\quad + (0.23127358645056 + 0.09797677528285 i) \hat{u}^4 \\ &\quad + (-0.32809453682074 + 1.2907084531487 i) \hat{u}^5 \end{aligned}$$

この式の  $\hat{u}$  に  $v + (0.517 - \hat{s})$  を代入し、 $v$  の 3 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned}\chi^{(3)}(v) &= (-\underline{0.40129786762779} - \underline{0.000086281544621635} i) \\ &+ (-\underline{0.25873492432482} - \underline{1.1675851134593} i) v \\ &+ (\underline{0.16681813302697} - \underline{0.083445063954989} i) v^2 \\ &+ (-\underline{0.17925868582708} - \underline{0.6959743295761} i) v^3\end{aligned}$$

ここで、下線部は正しい数値である。 $|0.517 - \hat{s}| \approx 10^{-4}$  であるから、 $\hat{\chi}^{(6)}$  の 6 次の項は  $\chi^{(3)}$  の  $v^i$  項には  $O(10^{-4(6-i)})$  の寄与しかしない。したがって、上式  $\chi^{(3)}(v)$  の各係数部は  $O(10^{-12})$  まで正しいはずで、実際、そうになっている。 ■

## 参 考 文 献

- [GCL92] K.O. Geddes, S.R. Czapor and G. Labahn: *Algorithms for Computer Algebra*, Ch. 6, Kluwer Academic, Boston-Dordrecht-London, 1992.
- [KT78] H.T. Kung and J.F. Traub: All algebraic functions can be computed fast, J. ACM **25** (1978), 245-260.
- [SK99] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, Japan J. Indus. Appl. Math., **16** (1999), 257-285. (This paper was submitted in March, 1993, and the authors received a referees' reports in September, 1996 and the letter of acceptance in June, 1998.)
- [SKK00] T. Sasaki, T. Kitamoto and F. Kako: On Cancellation Error in Newton's Method for Power Series Roots of Multivariate Polynomial, preprint (32 pages), 2000 (submitted).
- [SY98] T. Sasaki and S. Yamaguchi: An analysis of cancellation error in multivariate Hensel construction with floating-point number arithmetic, Proc. of ISSAC'98, pp. 1-8, ACM Press (1998).
- [Wal78] R. J. Walker: *Algebraic curves*, Ch. 4, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.